B–2518

B. Sc. (Part I) EXAMINATION, 2018

MATHEMATICS

Paper First

(Algebra and Trigonometry)

Time : Three Hours] [*Maximum Marks : 50*

नोट : प्रत्येक इकाई से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt any *two* parts from each Unit. All questions are compulsory. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) दर्शाइये कि प्रत्येक वर्ग आव्यूह को अद्वितीय रूप से $P + iQ$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं, जहाँ P एवं Q हर्मिटीय हैं।

Show that every square matrix can be represent as $P + iQ$ uniquely, where P and Q are Hermitian.

(ब) यदि $R_1 = [3, 1, -4]$, $R_2 = [2, 2, -3]$, $R_3 = [0, -4, 1]$, तो दर्शाइये कि पंक्ति आव्यूह R_1, R_2 एवं R_3 रैखिकतः परतंत्र हैं।

If $R_1 = [3, 1, -4]$, $R_2 = [2, 2, -3]$, $R_3 = [0, -4, 1]$, then show that R_1, R_2 and R_3 row matrix are linearly dependent.

A-103 P. T. O.

(स) निम्नलिखित आव्यूह को पंक्ति समानीत ऐशेलोन रूप में समानयन कीजिए एवं इसकी जाति ज्ञात कीजिए :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Reduce the following matrix into Echelon form and find its rank :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) दर्शाइये कि किसी आव्यूह के भिन्न-भिन्न आइगेन मानों के संगत आइगेन सदिश रैखिकतः स्वतंत्र होते हैं।

Show that eigen vectors corresponding to distinct eigen values of a matrix are linearly independent.

(ब) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ के लिए कैली-हैमिल्टन प्रमेय को सत्यापित कीजिए। इसका प्रयोग करके $2A^5 - 3A^4 + A^2 + 4I$ को A में एक रैखिक बहुपद के रूप में व्यक्त कीजिए।

Verify Cayley-Hamilton theorem for the matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Using that theorem express in the form of linear polynomial in A of $2A^5 - 3A^4 + A^2 + 4I$.

(स) दर्शाइये कि निम्नलिखित समीकरण असंगत हैं :

$$x + y + z = -3$$
$$3x + y - 2z = -2$$
$$2x + 4y + 7z = 7$$

Show that the following equations are inconsistent :

$$x + y + z = -3$$
$$3x + y - 2z = -2$$
$$2x + 4y + 7z = 7$$

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) कार्डन विधि से हल कीजिए :

$$9x^3 + 6x^2 - 1 = 0$$

Solve by Cardon's method :

$$9x^3 + 6x^2 - 1 = 0$$

(ब) यदि α, β, γ समीकरण $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ के मूल हैं, तो समीकरण ज्ञात कीजिए जिनके मूल $\frac{\alpha}{\beta+\gamma}, \frac{\beta}{\alpha+\gamma}, \frac{\gamma}{\alpha+\beta}$ हैं।

If α, β, γ are the roots of the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, find the equation whose roots are $\frac{\alpha}{\beta+\gamma}, \frac{\beta}{\alpha+\gamma}, \frac{\gamma}{\alpha+\beta}$.

(स) यदि समीकरण $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ के मूल की बहुलकता 2 है, तो सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक $\frac{bc - ad}{2(ac - d^2)}$ के बराबर है।

If multiplicity of the root of the equation $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ is 2, prove that each is equal to $\frac{bc - ad}{2(ac - d^2)}$.

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) सिद्ध कीजिए कि Q_+, संक्रिया * के सापेक्ष आवेली समूह बनाता है, जब * निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है $a * b = \frac{ab}{2}, \forall a, b \in Q_+$ (सभी धन परिमेय संख्याओं का समुच्चय)।

Prove that Q_+ with respect to operation * forms an abelian group, where * defined as $a * b = \frac{ab}{2}$, $\forall a, b \in Q_+$ (set of all positive rational numbers).

(ब) दर्शाइये कि दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ भी एक उपवलय होता है।

Show that intersection of two subrings is a subring.

(स) मान लीजिए कि H तथा K एक समूह G के परिमित उपसमूह हैं, तब दर्शाइये कि :

$$o(HK) = \frac{o(H).o(K)}{o(H \cap K)}$$

Let H and K are finite subgroup of group G, then show that :

$$o(HK) = \frac{o(H).o(K)}{o(H \cap K)}$$

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) यदि $x_r = \cos\frac{\pi}{2^r} + i\sin\frac{\pi}{2^r}$, जहाँ $r = 1, 2, 3, \ldots\ldots, \infty$, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$x_1 . x_2 . x_3 \ldots\ldots \infty = -1 .$$

If $x_r = \cos\frac{\pi}{2^r} + i\sin\frac{\pi}{2^r}$, where $r = 1, 2, 3, \ldots\ldots, \infty$, then prove that :

$$x_1 . x_2 . x_3 \ldots\ldots \infty = -1 .$$

(ब) यदि $\log\log\log(\alpha + i\beta) = p + iq$, तो सिद्ध कीजिए कि :

(i) $e^{e^p . \cos q} . \cos(e^p \sin q) = \frac{1}{2}\log(\alpha^2 + \beta^2)$

(ii) $e^{e^p . \cos q} . \sin(e^p . \sin q) = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$

If $\log\log\log(\alpha + i\beta) = p + iq$, then prove that :

(i) $e^{e^p . \cos q} . \cos(e^p \sin q) = \frac{1}{2}\log(\alpha^2 + \beta^2)$

(ii) $e^{e^p . \cos q} . \sin(e^p . \sin q) = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$

(स) सिद्ध कीजिए कि :

$$\tan^{-1}\sqrt{\frac{as}{bc}} + \tan^{-1}\sqrt{\frac{bs}{ac}} + \tan^{-1}\sqrt{\frac{cs}{ab}} = \pi$$

जहाँ $a + b + c = s$ ।

Prove that :

$$\tan^{-1}\sqrt{\frac{as}{bc}} + \tan^{-1}\sqrt{\frac{bs}{ac}} + \tan^{-1}\sqrt{\frac{cs}{ab}} = \pi$$

where $a + b + c = s$.